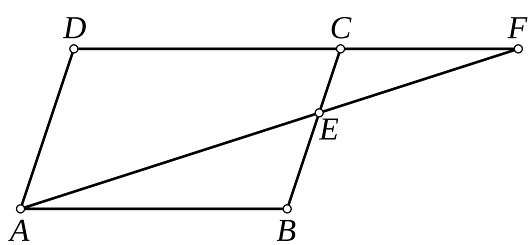
IX Certamen de Matemáticas Al-Bayat

Segundo Ciclo

21 de Abril de 2007

Problema 1.
Las edades de dos individuos suman 67 años, 2 meses y 20 días. Si uno de ellos tuviera 13 años, 4 meses y 2 días más, y el otro el mismo tiempo menos, los dos tendrían la misma edad. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Problema 2.
En la figura siguiente $ABCD$ es un paralelogramo, E está sobre el lado BC, y la prolongación de AE corta en F a la prolongación de DC. Sabiendo que $AB = 4$ cm y $BC = 3$ cm, ¿cuánto vale el producto $BE \cdot DF$?



Problema 3.
Un equipo de escolares, formado por muchachos y muchachas, tomó parte en una competición de ajedrez por equipos. Los muchachos de este equipo jugaron en total 60 partidas y las muchachas 40. De las partidas jugadas por los muchachos, éstos ganaron el 45 % y de las partidas jugadas por las muchachas, éstas perdieron el 50 %. El número de partidas perdidas por los muchachos superaba en 7 al de empates de las muchachas. Por una partida ganada se da 1 punto; por un empate medio punto y por una derrota, 0. Los miembros de un mismo equipo no juegan entre sí. Determinar cuántos puntos obtuvieron los muchachos de este equipo, si todo el equipo acumuló 52 puntos.

Problema 4.

Dividir 60 en 4 partes tales que la primera incrementada en 4, la segunda disminuida en 4, la tercera multiplicada por 4 y la cuarta dividida por 4 sean el mismo número.

Problema 5.

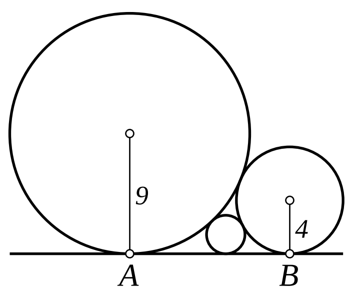
Susituir cada letra por un número del 0 al 9 de manera que las dos sumas resulten correctas:

PA + MA = PET

PET + PAT = DUD

Problema 6.

Dos discos de metal, de radios 9 cm y 4 cm, están apoyados uno sobre el otro y también sobre una varilla rectilínea.



a) ¿Cuál es la longitud del segmento AB que separa los puntos de contacto de los dos discos con la varilla?

b) ¿Y si los radios de los discos fueran r y s?

c) ¿Cuál debería ser el radio de un nuevo disco que tocara, como en la figura, a los dos discos anteriores y a la varilla?

IX Certamen Al-Bayat

Soluciones del Segundo Ciclo

1. Tenemos $x + y = 67\text{a}, 2\text{m}, 20\text{d} = 66\text{a}, 14\text{m}, 20\text{d}$ y $x - y = 26\text{a}, 8\text{m}, 4\text{d}$ de donde $x = 46\text{a}, 11\text{m}, 12\text{d}$ e $y = 20\text{a}, 3\text{m}, 8\text{d}$.

2. De $\frac{BE}{AB} = \frac{CE}{CF} = \frac{AD}{DF}$ se deduce $BE \cdot DF = AB \cdot AD = AB \cdot BC = 4 \cdot 3 = 12\ \text{cm}^2$.

3. Llamando x al número de partidas empatadas por los muchachos, podemos organizar los datos en la tabla siguiente:

	Ganadas	Empatadas	Perdidas
Muchachos	27	x	$33 - x$
Muchachas	$x - 6$	$26 - x$	20

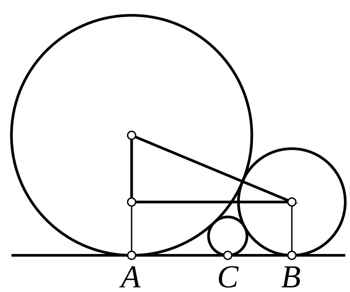
Se tendrá que cumplir entonces que $(27 + x - 6) \cdot 1 + (x + 26 - x) \cdot 0{,}5 = 52 \Rightarrow 21 + x + 13 = 52 \Rightarrow x = 18$ y los puntos ganados por los muchachos serán $27 + 0{,}5 \cdot 18 = 36$ puntos.

4. Llamando x, y, z, t a las partes, se debe cumplir

$$\begin{cases} x + y + z + t = 60 \\ x + 4 = y - 4 = 4z = \dfrac{t}{4} \end{cases},$$

de donde $x + (x+8) + (\frac{x}{4} + 1) + (4x + 16) = 60$. Resolviendo, resultan $x = 5{,}6$, $y = 13{,}6$, $z = 2{,}4$ y $t = 38{,}4$.

5. Vemos que $P = 1$ (la suma de dos números de dos cifras nunca llegará a 200). También $D = 2$ (ya que $D = 2$ ó $D = 3$, pero D es par), en consecuencia $T = 6$. Llegados aquí, solo puede ser $E = 0$, y también $A = 3, M = 9$. Finalmente $U = 4$.



6. Si unimos los centros y trazamos una paralela a AB por el centro de la circunferencia menor podemos formar un triángulo rectángulo con hipotenusa $r + s$, un cateto $r - s$ y otro igual a AB. Entonces $AB^2 = (r+s)^2 - (r-s)^2 = 4rs$. Entonces es $AB = 2\sqrt{rs}$. En nuestro ejemplo, $AB = 2 \cdot \sqrt{9 \cdot 4} = 12$ cm.

Si x es el radio de la circunferencia pequeña tendremos $AC + CB = AB$ y según lo anterior, $2\sqrt{9x} + 2\sqrt{4x} = 12$. Entonces $6\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = 12$ y $x = (6/5)^2 = 36/25$.